

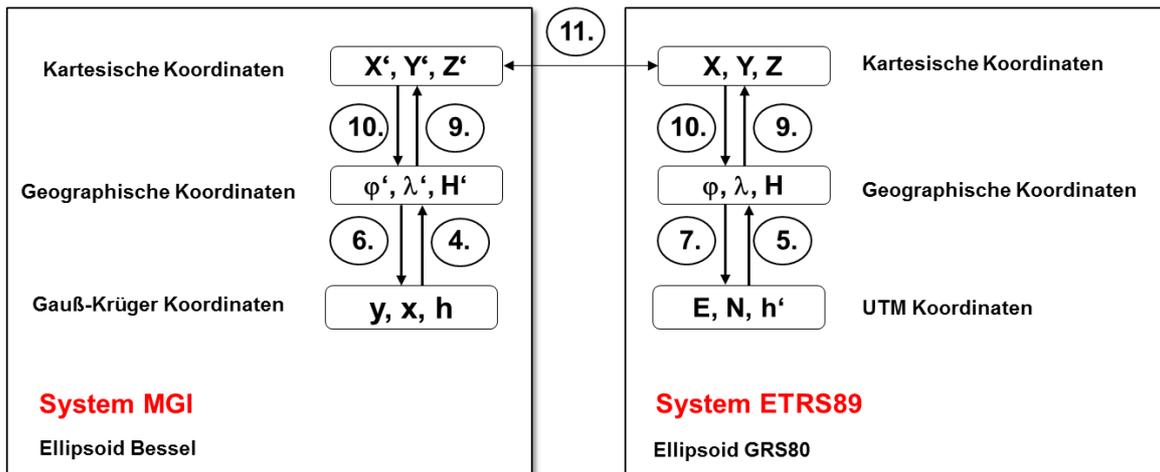
Transformation zwischen MGI/GK und ETRS89/UTM

Leitfaden zur Transformation zwischen MGI und ETRS89 und Formelsammlung der notwendigen Transformations- und Abbildungsgleichungen.

1 Überblick	2
2 Zahlenbeispiel	2
3 Ellipsoidparameter und abgeleitete Größen	3
4 Gauß-Krüger Koordinaten (y, x) à Geographische Koordinaten (L, B, Hell)	5
5 UTM-Koordinaten à geographische Koordinaten	6
6 Geographische Koordinaten à Gauß-Krüger-Koordinaten	7
7 Geographische Koordinaten à UTM-Koordinaten	8
8 Gauß-Krüger-Koordinaten à Koordinaten des Bundesmeldenetzes	9
9 Geographische Koordinaten à 3D-kartesische Koordinaten	9
10 3D-kartesische Koordinaten à geographische Koordinaten	10
11 Transformation zwischen ETRS89 und MGI (7-Parameter-Transformation)	11
11.1 BEV-Transformationsparameter	12

1 Überblick

Dieser Leitfaden beschreibt die Transformation zwischen den Systemen ETRS89/UTM und MGI/Gauß-Krüger mit allen erforderlichen Berechnungsschritten. In der graphischen Übersicht sind diese Schritte dargestellt, die Nummerierung verweist dabei auf das entsprechende Kapitel.



2 Zahlenbeispiel

Für einen beliebigen Punkt sind hier alle Koordinaten in beiden Systemen dargestellt.

	MGI /GK	ETRS89 /UTM
Kartesische Koordinaten X, Y, Z	4193833.397;1162617.607;4646771.34 6	4194424.236;1162702.529;4647245.51 1
Geographische Koordinaten Länge, Breite, Höhe (ell.)	Bezug auf Greenwich: 15.494477186;47.067525473;492.430 Bezug auf Ferro: 33.16114385;47.067525473;492.430	15.493476696;47.067128206;538.607
Undulation	1.196m (Bessel)	47.372m (GRS80)
Abbildung y, x, h bzw. E, N, h'	-63711.721;5214564.677;491.234 GK M34	537469.803;5212742.009;491.235 UTM Zone33 (15°)

3 Ellipsoidparameter und abgeleitete Größen

Parameter Bessel-Ellipsoid:

große Halbachse: $a = 6\,377\,397,15508$ m

kleine Halbachse: $b = 6\,356\,078,96290$ m

Parameter Ellipsoid GRS80:

große Halbachse: $a = 6\,378\,137,00000$ m

kleine Halbachse: $b = 6\,356\,752,31425$ m

davon abgeleitete Größen:

Polkrümmungsradius: $c = \frac{a^2}{b}$

Abplattung: $f = \frac{a - b}{a}$

1. numerische Exzentrizität: $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

2. numerische Exzentrizität: $e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

von der geographischen Breite abhängige Größen:

$$t = \tan \varphi$$

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$$

$$V = \sqrt{1 + h^2}$$

Meridiankrümmungsradius: $M = \frac{c}{V^3}$

Normalkrümmungsradius: $N = \frac{c}{V}$

Länge des Meridianbogens B^j :

$$B^j = \alpha \varphi^\circ - \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi - \delta \sin 6\varphi \quad (1)$$

Einheit in Meter, $\varphi^\circ =$ Breite in Altgrad

$$\alpha = \frac{A a (1 - e^2)}{\rho^\circ} \quad \rho^\circ = \frac{180}{\pi}$$

$$\beta = \frac{B}{2} a (1 - e^2)$$

$$\gamma = \frac{C}{4} a (1 - e^2)$$

$$\delta = \frac{D}{6} a (1 - e^2)$$

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \frac{43659}{65536} e^{10} + \dots$$

$$B = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \frac{2205}{2048} e^8 + \frac{72765}{65536} e^{10} + \dots$$

$$C = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \frac{10395}{16384} e^{10} + \dots$$

$$D = \frac{35}{512} e^6 + \frac{315}{2048} e^8 + \frac{31185}{131072} e^{10} + \dots$$

z.B.: für das Bessel-Ellipsoid:

$\alpha = 111\,120,61962 \text{ m}^\circ$ $\beta = 15\,988,6385 \text{ m}$ $\gamma = 16,7300 \text{ m}$ $\delta = 0,0218 \text{ m}$
--

Fußpunktsbreite: (geographische Breite einer bestimmten Meridianbogenlänge B°)

$$\varphi_x = \frac{B^j}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \sin 2\varphi_x - \frac{\gamma}{\alpha} \sin 4\varphi_x + \frac{\delta}{\alpha} \sin 6\varphi_x \quad (2)$$

Bestimmung durch Iteration !

4 Gauß-Krüger Koordinaten (y, x) → Geographische Koordinaten (L, B, Hell)

Zur Berechnung der Fußpunktsbreite φ_x (siehe Formel (2)) wird für die Meridianbogenlänge B^φ die x-Komponente eingesetzt. Die Fußpunktsbreite wird anschließend für die Berechnung aller von der geographischen Breite abhängigen Variablen (t, η , N) verwendet.

Geographische Breite j :

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_x &+ \frac{y^2 t}{2N^2} (-1 - \eta^2) + \frac{y^4 t}{24N^4} (5 + 3 t^2 + 6\eta^2 - 6 t^2 \eta^2 - 3\eta^4 - 9 t^2 \eta^4) \\ &+ \frac{y^6 t}{720N^6} (-61 - 90 t^2 - 45 t^4 - 107 \eta^2 + 162 t^2 \eta^2 + 45 t^4 \eta^2) \\ &+ \frac{y^8 t}{40320 N^8} (1385 + 3633 t^2 + 4095 t^4 + 1575 t^6) \end{aligned}$$

Nur notwendig für das UTM-System mit einer Streifenbreite $\pm 3^\circ$

Geographische Länge λ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \frac{y}{N \cos \varphi_x} + \frac{y^3}{6 N^3 \cos \varphi_x} (-1 - 2 t^2 - \eta^2) \\ \lambda &+ \frac{y^5}{120 N^5 \cos \varphi_x} (5 + 28 t^2 + 24 t^4 + 6\eta^2 + 8 t^2 \eta^2) \\ &+ \frac{y^7}{5040 N^7 \cos \varphi_x} (-61 - 662 t^2 - 1320 t^4 - 720 t^6) \end{aligned}$$

Nur notwendig für das UTM-System mit einer Streifenbreite $\pm 3^\circ$

Das jeweils letzte angegebene Glied der Gleichungen kann für die GK-Abbildung vernachlässigt werden.

λ_0 ist die geographische Länge des Bezugsmeridians der Abbildung, bezogen auf Greenwich. Die Bezugsmeridiane 28°, 31° und 34° der Gauß-Krüger Abbildung werden mit $\lambda_{\text{Ferro}} - \lambda_{\text{Greenwich}} = 17^\circ 40'$ auf Greenwich umgerechnet.

$H_{\text{Bessel}} = h + N_{\text{Bessel}}$... ellipsoidische Höhe (über Bessel-Ellipsoid)
h	... MGI-Gebrauchshöhe (Höhe über Adria)
N_{Bessel}	... Geoidundulation bezogen auf Bessel-Ellipsoid

5 UTM-Koordinaten \rightarrow geographische Koordinaten

Zur Abbildung nach UTM sind grundsätzlich die selben Formeln wie in Kapitel 4 zu verwenden, die UTM-Koordinaten müssen aber vorab in eine andere Form gebracht werden.

$$y = (\text{Easting}(E) - 500000) / 0.9996$$

$$x = \text{Northing}(N) / 0.9996$$

Easting (E) und Northing (N) ist die internationale Bezeichnung für der Rechtswert (RW) und Hochwert (HW) der UTM-Abbildung.

Die geographische Länge des Bezugsmeridians der Abbildung λ_0 beträgt 9° bei UTM/Zone32 und 15 ° bei UTM/Zone33 (Nullmeridian Greenwich).

$H_{\text{GRS80}} = h' + N_{\text{GRS80}}$... ellipsoidische Höhe (über GRS80-Ellipsoid)
h'	... orthometrische Höhe (Bezugspegel Amsterdam)
N_{GRS80}	... Geoidundulation bezogen auf GRS80-Ellipsoid

6 Geographische Koordinaten → Gauß-Krüger-Koordinaten

Hochwert x:

$$x = B^j + \frac{N}{2} \Delta\lambda^2 \sin\varphi \cos\varphi + \frac{N}{24} \Delta\lambda^4 \sin\varphi \cos^3\varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\ + \frac{N}{720} \Delta\lambda^6 \sin\varphi \cos^5\varphi (61 - 58t^2 + t^4)$$

$$+ \frac{N}{40320} \Delta\lambda^8 \sin\varphi \cos^7\varphi (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6)$$

Nur notwendig für das
UTM-System mit einer
Streifenbreite ±3°

Rechtswert y:

$$y = N \Delta\lambda \cos\varphi + \frac{N}{6} \Delta\lambda^3 \cos^3\varphi (1 - t^2 + \eta^2)$$

$$+ \frac{N}{120} \Delta\lambda^5 \cos^5\varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)$$

$$+ \frac{N}{5040} \Delta\lambda^7 \cos^7\varphi (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6)$$

Nur notwendig für das
UTM-System mit einer
Streifenbreite ±3°

Das jeweils letzte angegebene Glied der Abbildungsgleichungen kann für die GK-Abbildung vernachlässigt werden.

Die Meridianbogenlänge B^j [m] ist aus Formel (1) zu berechnen.

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

λ_0 Bezugsmeridian der Abbildung (28°, 31° und 34° im System Ferro) bezogen auf Greenwich mit $\lambda_{\text{Ferro}} - \lambda_{\text{Greenwich}} = 17^\circ 40'$

$h = H_{\text{BESSEL}} - N_{\text{BESSEL}}$... MGI-Gebrauchshöhe (Höhe über Adria)

H_{BESSEL} ... ellipsoidische Höhe über dem Bessel-Ellipsoid

N_{BESSEL} ... Geoidundulation bezogen auf Bessel-Ellipsoid

7 Geographische Koordinaten \rightarrow UTM-Koordinaten

Zur Abbildung nach UTM sind grundsätzlich die selben Formeln wie in Kapitel 6 zu verwenden, das Ergebnis ist aber noch mit einem Massstabsfaktor von 0.9996 zu multiplizieren. Eine Additionskonstante wird am Rechtswert angebracht, um immer positive Werte zu bekommen.

Easting(E) = $y * 0.9996 + 500000$

Northing(N) = $x * 0.9996$

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$

λ_0 Bezugsmeridian der UTM-Abbildung (Zone 32 = 9°, Zone 33 = 15°)

$h' = H_{\text{GRS80}} - N_{\text{GRS80}}$... orthometrische Höhe

H_{GRS80} ... ellipsoidische Höhe (über GRS80-Ellipsoid)

N_{GRS80} ... Geoidundulation bezogen auf GRS80-Ellipsoid

8 Gauß-Krüger-Koordinaten à Koordinaten des Bundesmeldenetzes

$$x_{BMN} = x_{GK} - 5000000$$

$$y_{BMN} = y_{GK} + k$$

mit

$$k = 150000 \text{ für M28}$$

$$k = 450000 \text{ für M31}$$

$$k = 750000 \text{ für M34}$$

9 Geographische Koordinaten à 3D-kartesische Koordinaten

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} (N + H) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + H) \cos \varphi \sin \lambda \\ \left(\left(\frac{b}{a} \right)^2 N + H \right) \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

N ... Normalkrümmungsradius

H ... ellipsoidische Höhe

10 3D-kartesische Koordinaten à geographische Koordinaten

$$\tan \lambda = \frac{Y}{X}$$

$$\tan \varphi = \frac{Z + e'^2 \cdot b \sin^3 \vartheta}{\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 \cdot a \cos^3 \vartheta} \quad \text{mit } \vartheta = \arctan \frac{Z \cdot a}{\sqrt{X^2 + Y^2} \cdot b}$$

$$H = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N$$

N ... Normalkrümmungsradius

H ... ellipsoidische Höhe

11 Transformation zwischen ETRS89 und MGI (7-Parameter-Transformation)

$$\underline{X}_{MGI} = \underline{C} + (1 + dm) \underline{R} \underline{X}_{ETRS89} \quad \dots \text{Matrizengleichung}$$

Rotationsmatrix \underline{R} (Coordinate Frame Convention) =

$$\begin{pmatrix} \cos(r_y) \cos(r_z) & \sin(r_x) \sin(r_y) \cos(r_z) + \cos(r_x) \sin(r_z) & -\cos(r_x) \sin(r_y) \cos(r_z) + \sin(r_x) \sin(r_z) \\ -\cos(r_y) \sin(r_z) & -\sin(r_x) \sin(r_y) \sin(r_z) + \cos(r_x) \cos(r_z) & \cos(r_x) \sin(r_y) \sin(r_z) + \sin(r_x) \cos(r_z) \\ \sin(r_y) & -\sin(r_x) \cos(r_y) & \cos(r_x) \cos(r_y) \end{pmatrix}$$

In dieser Form wird die Matrix im BEV Transformator verwendet. Bei sehr kleinen Drehwinkeln kann man für viele Anwendungen auch die vereinfachte Rotationsmatrix verwenden:

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha(z) & -\alpha(y) \\ -\alpha(z) & 1 & \alpha(x) \\ \alpha(y) & -\alpha(x) & 1 \end{pmatrix}$$

Die Drehwinkel sind in der vereinfachten Drehmatrix im Bogenmaß einzusetzen!
(Winkel im Bogenmaß = Winkel in Altgrad * $\pi / 180$)

Größe	Beschreibung
\underline{X}_{MGI}	Ergebnisvektor im System MGI
\underline{X}_{ETRS89}	Ausgangsvektor im System ETRS89
\underline{C}	Verschiebungsvektor [ΔX , ΔY , ΔZ]
ΔX	Komponente von \underline{C} in X [m]
ΔY	Komponente von \underline{C} in Y [m]
ΔZ	Komponente von \underline{C} in Z [m]
r_x	Rotation um die X-Achse
r_y	Rotation um die Y-Achse
r_z	Rotation um die Z-Achse
$\alpha(x)$	Rotation um die X-Achse [Radiant]
$\alpha(y)$	Rotation um die Y-Achse [Radiant]
$\alpha(z)$	Rotation um die Z-Achse [Radiant]
dm	Maßstabsdifferenz zwischen den beiden Systemen

11.1 BEV-Transformationsparameter

Größe	Wert	Einheit
ΔX	-577.326	Meter
ΔY	-90.129	Meter
ΔZ	-463.919	Meter
r_x	5.137	Altsekunden
r_y	1.474	Altsekunden
r_z	5.297	Altsekunden
dm	-0.0000024232	-

Hinweis:

Der EPSG-Code 1619 beschreibt grundsätzlich die selbe Transformation, allerdings sind die Parameter dort von ETRS89 nach MGI angegeben und es wird die Position Vector Convention verwendet.